Isenmann - Pecatte

Décomposition des groupes abéliens finis

Lemme (prolongement d'un caractère) Soit G un groupe abélien fini et soit H un sous-groupe de G.

Tout caractère $\psi : H \longrightarrow \mathbb{C}^*$ se prolonge en un caractère sur G.

Procédons par récurrence sur $\# G/H$.

▷ initialisation ($n = 1$) : on a alors $G = H$ et le résultat est évident

▷ hérédité : supposons que pour tout sous-groupe K de G d'indice inférieur à n, le résultat soit vrai
Soit $H < G$ vérifiant $[G:H] = n > 1$, on a alors $H \subsetneq G$.
Il existe donc $x \in G \setminus H$, on note $r := \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid x^k \in H\}$ et $s := \operatorname{ord}(x)$.
Soit $\psi \in \widehat{H}$,

$$\psi(x^r)^s = \psi(x^{rs}) = \psi(e) = 1 \Rightarrow |\psi(x^r)| = 1$$

On considère alors ω une racine r-ième de $\psi(x^r)$.
De plus, G étant abélien, pour tout $z \in \langle H, x\rangle$,

$$z = hx^{\ell} \quad \text{avec } h \in H \text{ et } \ell \in [\![0, r-1]\!]$$

↪ l'écriture car $h_1 x^{\ell_1} = h_2 x^{\ell_2} \Rightarrow x^{\ell_1 - \ell_2} = h_1^{-1} h_2 \in H \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$ car r minimal $\Rightarrow h_1 = h_2$

On pose alors :

$$\tilde{\psi} : \langle H, x\rangle \longrightarrow \mathbb{C}^*$$
$$hx^{\ell} \longmapsto \psi(h)\,\omega^{\ell}$$

Soient $h_1 x^{\ell_1}, h_2 x^{\ell_2} \in \langle H, x\rangle$ alors :

- si $\ell_1 + \ell_2 < r$, $\tilde{\psi}(h_1 x^{\ell_1} h_2 x^{\ell_2}) = \psi(h_1 h_2)\,\omega^{\ell_1+\ell_2} = \psi(h_1)\omega^{\ell_1}\psi(h_2)\omega^{\ell_2} = \tilde{\psi}(h_1 x^{\ell_1})\,\tilde{\psi}(h_2 x^{\ell_2})$
- si $r \leqslant \ell_1 + \ell_2 < 2r$, $\tilde{\psi}(h_1 x^{\ell_1} h_2 x^{\ell_2}) = \psi(h_1 h_2 x^{r})\,\omega^{\ell_1+\ell_2-r} = \psi(h_1)\psi(h_2)\,\omega^{r}\,\omega^{\ell_1+\ell_2-r} = \tilde{\psi}(h_1 x^{\ell_1})\,\tilde{\psi}(h_2 x^{\ell_2})$

Ainsi, $\tilde{\psi}$ est un caractère de $\langle H, x\rangle$ et prolonge ψ. Ceci prouve le résultat par récurrence.

Théorème (décomposition des groupes abéliens finis) Soit G un groupe abélien fini non trivial.

Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $(d_1, \dots, d_r) \subset \mathbb{N}^*$ vérifiant pour $i \in [\![1, r-1]\!]$, d_i divise d_{i+1}, tels que $G \simeq \mu_{d_1} \times \dots \times \mu_{d_r}$

Procédons par récurrence sur $\# G$.

▷ initialisation ($n = 2$) : si $|G| = 2$ alors $G \simeq \mu_2$, le résultat est vrai

▷ hérédité : soit $n \geqslant 3$ fixé et supposons que tout groupe abélien fini d'ordre inférieur ou égal à $n-1$ vérifie le résultat
Soit $|G| = n$. On note m l'exposant de G et on considère x_0 d'ordre m.
Comme le groupe $\langle x_0\rangle$ est cyclique, il existe un isomorphisme $\chi_0 : \langle x_0\rangle \longrightarrow \mathbb{U}_m = \mu_m \in \widehat{\langle x_0\rangle}$.
On applique alors le lemme de prolongement des caractères : il existe alors $\chi \in \widehat{G}$ un prolongement de χ_0 sur G.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} \text{tout élément } G \text{ est d'ordre divisant } m \\ \operatorname{Im} \chi_0 = \mu_m \subset \operatorname{Im} \chi \end{array}\right\} \text{ donc } \operatorname{Im} \chi = \mu_m$$

Par le 1er théorème d'isomorphisme : $G/\operatorname{Ker} \chi \simeq \mu_m$

On pose :

$$\varphi : \operatorname{Ker} \chi \times \langle x_0\rangle \longrightarrow G, \ (h, x_0^a) \longmapsto h x_0^a$$

On a alors :

- si $h x_0^a = e$ alors $\chi(h x_0^a) = 1$ i.e. $\chi_0(x_0^a) = \chi_0(x_0)^a = 1$. Ainsi, m divise a i.e. $a = mb$.

Donc $e = h x_0^{mb} = h$ et $x_0^{mb} = e$. Alors $\operatorname{Ker} \varphi = \{(e, e)\}$.

- par égalité des cardinaux, φ est surjective

Ainsi :

$$G \simeq \operatorname{Ker} \chi \times \langle x_0\rangle$$

D'où, par hypothèse de récurrence,

$$G \simeq \mu_{d_1} \times \dots \times \mu_{d_{r-1}} \times \mu_m$$